哈尔滨市第六中学校 2020 届第三次模拟考试试题

文科数学

考试说明： 本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，满分 150 分，考试时间 120 分钟．

（1）答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚；

（2)选择题必须使用 2B 铅笔填涂, 非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写, 字体工整, 字迹清楚；

（3）请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效；

（4）保持卡面清洁，不得折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、刮纸刀．

一．选择题：本题共 12 小题，每题 5 分，共 60 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的.

1. 已知 $A=\{x\mid x>1\}$， $B=\{x|x<2\}$，则 $A\cap B=$（　　）

$A.\ (1,+\infty)$　　$B.\ (1,2)$　　$C.\ (2,+\infty)$　　$D.\ (-\infty,2)$

2. 已知向量 $\vec{a}=(1,-2)$， $\vec{b}=(m,1)$. 若向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 垂直，则 $m=$（　　）

$A.\ -2$　　$B.\ -3$　　$C.\ 1$　　$D.\ 2$

3. 在复平面内，复数 $z=\dfrac{1+2i}{1+i}$ 对应的点位于（　　）

$A.$ 第一象限　　$B.$ 第二象限　　$C.$ 第三象限　　$D.$ 第四象限

4. 双曲线 $\dfrac{x^2}{4}-y^2=1$ 的渐近线方程是（　　）

$A.\ x\pm 2y=0$　　$B.\ y\pm 2x=0$　　$C.\ x\pm 4y=0$　　$D.\ y\pm 4x=0$

5. 若实数 x,y 满足 $\begin{cases}x+y\ge 4\\ x+3y-6\le 0\\ y\ge 0\end{cases}$，则 $z=x-y$ 的最小值是（　　）

$A.\ -2$　　$B.\ -4$　　$C.\ 2$　　$D.\ 6$

6. 已知等差数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1+a_5=10$，$a_8=3a_3$，则数列 $\{a_n\}$ 的前 10 项的和等于（　　）

$A.\ 10$　　$B.\ 11$　　$C.\ 100$　　$D.\ 110$

7. 设 $a=\log_3 2, b=\ln 2, c=2^{\frac{1}{2}}$ 则（　　）

$A.\ a<b<c$　　$B.\ b<a<c$

$C.\ c<a<b$　　$D.\ c<b<a$

8. 若某位同学 5 次数学成绩和 8 次语文成绩的茎叶图如图，则该同学的数学成绩平均分与语文成绩的中位数分别为(　　)

数学		语文
	9	6 8 9
6 8	10	6 7 8
1 3	11	2 5
2	12	

$A.\ 112,107$　　$B.\ 113,106.5$

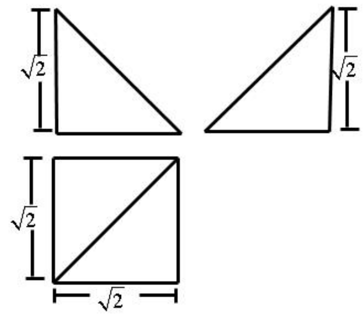
$C.\ 112,106.5$　　$D.\ 112,108$

9. 已知函数 $f(x)=\sin 2x-\cos 2x$，则（　　）

$A.\ f(x)$ 的最小正周期为 $\dfrac{\pi}{2}$　　$B.$ 曲线 $y=f(x)$ 关于 $\left(\dfrac{3\pi}{8},0\right)$ 对称

$C.\ f(x)$ 的最大值为 2　　$D.$ 曲线 $y=f(x)$ 关于 $x=\dfrac{3\pi}{8}$ 对称

10. 四棱锥 $S-ABCD$ 的三视图如图所示，四棱锥 $S-ABCD$ 的五个顶点都在一个球面上， 则该球的表面积为（　　）



$A.\ 3\pi$　　$B.\ 6\pi$

$C.\ 9\pi$　　$D.\ 12\pi$

11. 若函数 $f(x)=x^3-3x+2a$ 有 3 个不同的零点，则实数 a 的取值范围是（　　）

$A.\ [-1,1]$　　$B.\ (-1,1)$　　$C.\ (-2,1)$　　$D.\ (-1,2)$

12. 设 F_1,F_2 分别是椭圆 C 的左，右焦点，过点 F_1 的直线交椭圆 C 于 M,N 两点，若 $\overrightarrow{MF_1}=3\overrightarrow{F_1N}$，且 $\cos\angle MNF_2=\dfrac{4}{5}$，则椭圆 C 的离心率为（　　）

$A.\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}$　　$B.\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}$　　$C.\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{2}$　　$D.\ \dfrac{\sqrt{2}-1}{3}$

第Ⅱ卷（非选择题　共 90 分）

二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分．将答案填在机读卡上相应的位置．

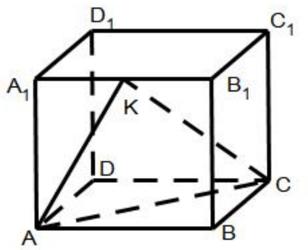
13. 已知抛物线的方程 $y=2x^2$，其准线方程为__________；

14. 若命题“$\exists x_0\in R, 2x_0^2+2ax_0+1<0$”是假命题，则实数 a 的取值范围是__________；

15. 已知各项都为正数的等比数列$\{a_n\}$，若$a_8 \cdot a_{12}+5a_{10}=14$，则

$\log_2 a_1+\log_2 a_2+\log_2 a_3+\cdots+\log_2 a_{19}=$__________；

16. 正方体$ABCD-A_1B_1C_1D_1$的棱长为2，点K在棱A_1B_1上运动，过A,C,K三点作正方体的截面，若K与B_1重合，此时截面把正方体分成体积之比为λ（$0<\lambda<1$）的两部分，则$\lambda=$__________；若K为棱A_1B_1的中点，则截面面积为__________.



三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分．解答时应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤．

17.（**本小题满分 12 分**）

在ΔABC中，角A,B,C所对应的边分别为a,b,c，已知$a\cos C=\left(2b-c\right)\cos A$．

（1）求角A的大小；

（2）若$a=\sqrt{7}$，$b=2$，求ΔABC的面积.

18.（**本小题满分 12 分**）

目前，新冠病毒引发的肺炎疫情在全球肆虐，为了止损，某地一水果店老板利用抖音直播卖货，经过一段时间对一种水果的销售情况进行统计，得到5天的数据如下：

销售单价 x_i（元/kg）	8	8.5	9	9.5	10
销售量 y_i（kg）	1100	1000	800	600	500

（Ⅰ）建立 y 关于 x 的回归直线方程；

（Ⅱ）该水果店开展促销活动，当该水果销售单价为 6 元/kg 时，其销售量达到 $1800kg$，若由回归直线方程得到的预测数据与此次促销活动的实际数据之差的绝对值不超过 $50kg$，则认为所得到的回归直线方程是理想的，试问：（Ⅰ）中得到的回归直线方程是否理想？

（Ⅲ）根据（Ⅰ）的结果，若该水果成本是 5 元/kg，销售单价 x 为何值时（销售单价不超过 11 元/kg），该水果店利润的预计值最大？

参考公式：回归直线方程 $\hat{y}=\hat{b}x+\hat{a}$，其中 $\hat{b}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}x_iy_i-n\overline{x}\overline{y}}{\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\overline{x}^2}$，$\hat{a}=\overline{y}-\hat{b}\overline{x}$.

参考数据：$\sum_{i=1}^{5}x_iy_i=35200$，$\sum_{i=1}^{5}x_i^2=407.5$.

19.（**本小题满分 12 分**）

已知正ΔABC边长为3，点M，N分别是AB，AC边上的点，$AN=BM=1$，如图 1 所示. 将ΔAMN沿MN折起到ΔPMN的位置，使线段PC长为$\sqrt{5}$，连接PB，如图 2 所示.

（Ⅰ）求证:直线$PN\perp$平面$BCNM$；

（Ⅱ）求四棱锥$P-BCNM$的体积.

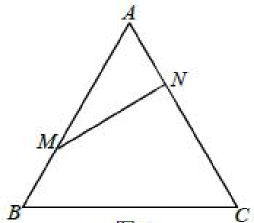


图 1

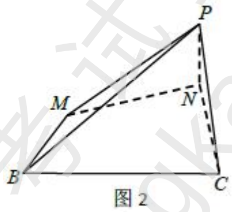


图 2

20.（**本小题满分 12 分**）

已知椭圆$E:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$的长轴长为$4$，且其离心率$e=\dfrac{1}{2}$.

（Ⅰ）求椭圆E的方程；

（Ⅱ）若过椭圆 E 右焦点的直线 l 交椭圆于 M,N 两点，求 ΔMON 面积的最大值.

（其中 O 为坐标原点）

21.（**本小题满分 12 分**）

已知函数 $f(x)=a(x+\ln x)$，$g(x)=xe^{x}$.

（1）求函数 $g(x)$ 在 $x=0$ 处的切线方程；

（2）设 $h(x)=f(x)-g(x)$.

①当 $a=e$ 时，求函数 $h(x)$ 的单调区间；

②当 $a=1$ 时，求函数 $h(x)$ 的极大值.

请考生在 22、23 两题中任选一题作答，如果多做，则按所做的第一题记分.

22.（**本小题满分 10 分**）**选修 4-4：坐标系与参数方程**

在直角坐标系 xOy 中，直线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x=-\dfrac{\sqrt{5}}{5}t \\ y=1+\dfrac{2\sqrt{5}t}{5} \end{cases}$（其中 t 为参数）.以坐标原点 O 为极点，

x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系，曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho\cos^2\theta=\sin\theta$.

（1）求 C_1 和 C_2 的直角坐标方程；

（2）设点 $P\left(0,1\right)$，直线 C_1 交曲线 C_2 于 A,B 两点，求 $\left|PA\right|^2+\left|PB\right|^2$ 的值.

23.（本小题满分 10 分）选修 4—5：不等式选讲

函数 $f\left(x\right)=\left|2x-1\right|+\left|x+2\right|$.

（Ⅰ）求函数 $f\left(x\right)$ 的最小值；

（Ⅱ）若 $f\left(x\right)$ 的最小值为 M ，$a+2b=2M\left(a>0,b>0\right)$，求证：$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{2b+1}\geq\dfrac{4}{7}$.

哈六中三模文科数学答案

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案	B	D	A	A	C	C	A	C	D	B	B	A

二、填空题

13. $-\frac{1}{8}$　　14. $\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right]$　　15. 19　　16. $\frac{1}{5};\frac{9}{2}$

17.（1）由正弦定理得：$\sin A\sin\frac{A+C}{2}=\sin B\sin A$，　　----2 分

又因为 $\sin A\neq 0$，所以 $\sin\frac{A+C}{2}=\sin B$，

又因为在 Δ 中所以 $\frac{A+C}{2}=B$ 或 $\frac{A+C}{2}+B=\pi$　　----4 分

解得 $B=\frac{\pi}{3}$　　----6 分

（2）因为 $a=2$，$b=\sqrt{7}$，$B=\frac{\pi}{3}$，

由余弦定理得 $\sqrt{7}^2=2^2+c^2-2\times2\times c\cos\frac{\pi}{3}$，

即 $c^2-2c-3=0$.　　----8 分

又 $c>0$，所以 $c=3$.　　----10 分

故 $\triangle ABC$ 的面积为 $S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}ac\sin B=\frac{1}{2}\times2\times3\times\sin\frac{\pi}{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.　　----12 分

18.（Ⅰ）$\overline{x}=9,\overline{y}=800$，

回归方程为 $\hat{y}=-320x+3680$　　----4 分

（Ⅱ）当 $x=6$ 时，$\hat{y}=-320\times6+3680=1760$，则 $\left|1760-1800\right|=40<50$，

所以可以认为所得到的回归直线方程是理想的.　　----8 分

（III）设销售利润为M，则$M=(x-5)(-320x+3680)(5<x\leq 11)$

$M=-320x^2+5280x-19400$，所以$x=8.25$时，M取最大值，

所以该产品单价定为8.25元时，公司才能获得最大利润.　　----12 分

19.解：（Ⅰ）依题意得，在$\triangle AMN$中，$AM=2$，$AN=1$，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$

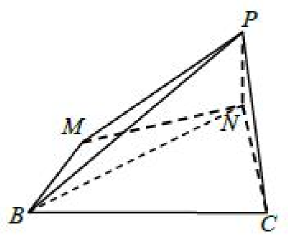
由余弦定理得$MN^2=2^2+1^2-2\times 2\times 1\times\cos\dfrac{\pi}{3}=3$，即$MN=\sqrt{3}$

$\therefore MN^2+AN^2=AM^2$，$\therefore AN\perp MN$，即$PN\perp MN$

在图2$\triangle PNC$中，$PN=1$，$NC=2$，$PC=\sqrt{5}$

$\therefore PC^2=PN^2+NC^2$，$\therefore PN\perp NC$

又$\because MN\cap NC=N$，$MN,NC\subset$平面$BCNM$，$\therefore PN\perp$平面$BCNM$　　----6 分



（Ⅱ）由（Ⅰ）可知$PN\perp$平面$BCNM$

所以PN为四棱锥$P-BCNM$的高，

$S_{BCNM}=S_{\Delta ABC}-S_{\Delta AMN}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 3^2-\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{7\sqrt{3}}{4}$

所以$V_{P-BCNM}=\dfrac{1}{3}S_{BCNM}\cdot PN=\dfrac{7}{12}\sqrt{3}$　　----12 分

20.（1）（Ⅰ）由已知得$a=2,c=1$，$b=\sqrt{3}$，

则E的方程为$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1$；　　----4 分

（Ⅱ）由已知直线l斜率不为0，$F(1,0)$，所以设直线l方程为：$x=my+1$，$M(x_1,y_1),N(x_2,y_2)$，

由$\begin{cases} x=my+1 \\ \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{3}=1 \end{cases}$ 得：$\left(3m^2+4\right)y^2+6my-9=0$

$\Delta=144\left(m^2+1\right)>0 \quad y_1+y_2=-\dfrac{6m}{3m^2+4}, y_1y_2=\dfrac{-9}{3m^2+4}$ ----6 分

$S_{\Delta MON}=\dfrac{1}{2}|OM|\cdot|y_1-y_2|=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\sqrt{(y_1+y_2)^2-4y_1y_2}=\dfrac{6\sqrt{m^2+1}}{3m^2+4}$ ----8 分

设$t=\sqrt{m^2+1}(t\geq1)$，则

$S_{\Delta MON}=\dfrac{6t}{3t^2+1}=\dfrac{6}{3t+\frac{1}{t}}$，又因为$y=3t+\dfrac{1}{t}$在$[1,+\infty)$上单调增，

所以当$t=1$时，ΔMON面积有最大值$\dfrac{3}{2}$，此时$m=0$. ----12 分

21.（1）$\because$ $g'(x)=(x+1)e^x$，$\therefore$切线斜率$k=g'(0)=(0+1)e^0=1$

又$\because$ $g(0)=0$ $\therefore$切线方程为$y=x$ ----3 分

（2）当$a=e$时，$h(x)=e(x+\ln x)-xe^x$由$h'(x)=e\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-(x+1)e^x=\dfrac{(x+1)\left(e-xe^x\right)}{x}(x>0)$，

设$k(x)=e-xe^x$，$k'(x)=-(x+1)e^x<0$，即$k(x)=e-xe^x$在$(0,+\infty)$上单调递减，又因为

$k(1)=e-1\cdot e^1=0$

所以$0<x<1$时，$k(x)>0$，即$h'(x)>0$，此时函数$h(x)$单调递增，

$x>1$时，$k(x)<0$，即$h'(x)<0$，此时函数$h(x)$单调递减，

所以当$a=e$时，函数$h(x)$的单调增区间为$(0,1)$，单调减区间为$(1,+\infty)$ ----7 分

②当$a=1$时，$h(x)=x+\ln x-xe^x\ (x>0)$，$h'(x)=1+\dfrac{1}{x}-(x+1)e^x=\dfrac{(x+1)\left(1-xe^x\right)}{x}$，

令 $M(x)=1-xe^{x}$， $M'(x)=-(x+1)e^{x}<0$，则 $M(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调递减，

又 $M\left(0\right)=1-0>0$，$M(1)=1-e<0$，

$\therefore\ \exists x_0\in\left(\,0,1\,\right)$ 使得 $M(x_0)=1-x_0e^{x_0}=0$，

故当 $x\in\left(0,x_0\right)$， $M(x)>0$ 即 $h'(x)>0$，此时 $h(x)$ 单调递增；

当 $x\in\left(x_0,+\infty\right)$， $M(x)<0$ 即 $h'(x)<0$，此时 $h(x)$ 单调递减；

且 $h'(x_0)=0$

$\therefore\ h(x)_{极大值}=h\left(x_0\right)=x_0+\ln x_0-x_0e^{x_0}$

又 $x_0e^{x_0}=1$，$\therefore\ \ln(x_0e^{x_0})=\ln 1=0$，所以 $\ln x_0+\ln e^{x_0}=\ln x_0+x_0=0$

故 $h(x)_{极大值}=h\left(x_0\right)=x_0+\ln x_0-x_0e^{x_0}=0-1=-1$. ----12 分

22.(1)由已知得 C_1,C_2 的直角坐标方程分别为 $C_1:y=-2x+1,C_2:x^2=y$ ----5 分

（2）将直线 C_1 的参数方程代入 C_2 直角方程得：$t^2-2\sqrt{5}t-5=0$，不妨设 A,B 对应的参数分别为 t_1,t_2，则

$\Delta>0$ 恒成立，$t_1+t_2=2\sqrt{5},t_1t_2=-5$，

又因为 $P(0,1)$，所以由参数 t 的几何意义得：

$\left|PA\right|^2+\left|PB\right|^2=t_1^2+t_2^2=\left(t_1+t_2\right)^2-2t_1t_2=30$

$\therefore\ \left|PA\right|^2+\left|PB\right|^2=30$ ----10 分

23.（1）$f(x)=|2x-1|+|x+2|=\begin{cases}-3x-1, x\le -2,\\ -x+3, -2<x<\dfrac{1}{2},\\ 3x+1, x\ge \dfrac{1}{2},\end{cases}$

当$x\leqslant -2$时，$f(x)\ge 5$；当$-2<x<\dfrac{1}{2}$时，$\dfrac{5}{2}<f(x)<5$；

当$x\ge \dfrac{1}{2}$时，$f(x)\ge \dfrac{5}{2}$．所以$f(x)$的最小值为$\dfrac{5}{2}$．　　----5 分

（2）由（1）知$M=\dfrac{5}{2}$，即$a+2b=5$，

又因为$a>0,b>0$，

所以$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{2b+1}=\dfrac{1}{7}[(a+1)+(2b+1)]\left(\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{2b+1}\right)$

$=\dfrac{1}{7}\left(2+\dfrac{2b+1}{a+1}+\dfrac{a+1}{2b+1}\right)\ge \dfrac{1}{7}\left(2+2\sqrt{\dfrac{2b+1}{a+1}\cdot\dfrac{a+1}{2b+1}}\right)=\dfrac{4}{7}$．

当且仅当$a=2b$，即$a=\dfrac{5}{2},b=\dfrac{5}{4}$时，等号成立，

所以$\dfrac{1}{a+1}+\dfrac{1}{2b+1}\ge \dfrac{4}{7}$．　　----10 分