

哈尔滨市第六中学 2020 届高三第三次模拟考试

理科数学试卷



考试说明：本试卷分第 I 卷（选择题）和第 II 卷（非选择题）两部分，
满分 150 分，考试时间 120 分钟。

- (1) 答题前，考生先将自己的姓名、准考证号码填写清楚；
- (2) 选择题必须使用 2B 铅笔填涂，非选择题必须使用 0.5 毫米黑色字迹的签字笔书写，字体工整，字迹清楚；
- (3) 请在各题目的答题区域内作答，超出答题区域书写的答案无效，在草稿纸、试题卷上答题无效；
- (4) 保持卡面清洁，不得折叠、不要弄破、弄皱，不准使用涂改液、刮纸刀。

第 I 卷（选择题 共 60 分）

一、选择题：本大题共 12 个小题，每小题 5 分，共 60 分。在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设集合 $A = \{x | y = x^2 - 3x \leq 0\}$, $B = \{x | y = 3^x > 1\}$, 则 $A \cup B =$ ()
 A. $(0, 3]$ B. $[0, +\infty)$ C. $\{x | 0 < x < 3\}$ D. $(0, +\infty)$
2. 设 $z = \frac{2+i}{1-i}$, 则 $|z| =$ ()
 A. 2 B. 3 C. $\frac{3}{2}$ D. $\frac{\sqrt{10}}{2}$
3. 已知向量 $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (k, 1)$ 且 $\vec{a} \perp (\vec{a} + \vec{b})$, 则 $k =$ ()
 A. 1 B. 2 C. -3 D. -2
4. 设 $a = \log_5 3$, $b = \log_5 4$, $c = 2^{\frac{1}{5}}$ 则 ()
 A. $a < b < c$ B. $b < c < a$
 C. $c < a < b$ D. $c < b < a$
5. 若 $\cos 2\theta = \frac{1}{4}$, 则 $\sin^2 \theta + 2\cos^2 \theta$ 的值为 ()
 A. $\frac{7}{8}$ B. $\frac{19}{32}$ C. $\frac{13}{8}$ D. $\frac{3}{2}$
6. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 若 $a_5 = 2a_4$, $a_2 = 2$, 则 $a_6 =$ ()

A. 64

B. 16

C. 8

D. 32

7. 若函数 $f(x) = 2^x + a^2x - 2a$ 的零点在区间 $(0,1)$ 上, 则 a 的取值范围是 ()

A. $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$

B. $(-\infty, 1)$

C. $\left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$

D. $(1, +\infty)$

8. 函数 $f(x) = \sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$, 下列结论正确的是 ()

A. 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位, 可得到函数 $y = \sin 2x$ 的图像

B. $y = f(x)$ 的图像关于 $(0,1)$ 中心对称

C. $y = f(x)$ 的图像关于直线 $x = \frac{5\pi}{12}$ 对称

D. $y = f(x)$ 在 $\left(\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right)$ 为增函数

9. 在 $\left(1 + x + \frac{1}{x^{2020}}\right)^{12}$ 的展开式中, x^2 项的系数为 ()

A. 10

B. 25

C. 35

D. 66

10. 已知三棱锥 $P-ABC$ 的外接球的球心为 O , $PA \perp$ 平面 ABC , $AB \perp AC$, $AB = AC = 4$, $PA = 2$, 则球心 O 到平面 PBC 的距离为 ()

A. $\frac{1}{3}$

B. $\frac{\sqrt{6}}{3}$

C. $\frac{\sqrt{3}}{3}$

D. $\sqrt{3}$

11. 在 $\triangle ABC$ 中, A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且满足 $8\cos^2 \frac{A}{2} - 2\cos 2(B+C) - 7 = 0$,

$a = 2$, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 ()

A. $\sqrt{6}$

B. $\sqrt{3} + 1$

C. $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$

D. $\sqrt{3}$

12. 已知定义域为 R 的奇函数 $f(x)$, 满足 $f(x) = \begin{cases} e^{|x-1|} & 0 < x \leq 2 \\ \frac{2e}{x} & x > 2 \end{cases}$, 则下列叙述正确的为 ()

①存在实数 k , 使关于 x 的方程 $f(x) = kx$ 有 7 个不相等的实数根

②当 $-1 < x_1 < x_2 < 1$ 时, 恒有 $f(x_1) > f(x_2)$

③若当 $x \in (0, a]$ 时, $f(x)$ 的最小值为 1, 则 $a \in [1, 2e]$

④若关于 x 的方程 $f(x) = \frac{5}{4}$ 和 $f(x) = m$ 的所有实数根之和为零, 则 $m = -\frac{5}{4}$

A. ①②③

B. ①③

C. ②④

D. ①②③④

第 II 卷 (非选择题 共 90 分)

本卷包括必考题和选考题两部分, 第 13 题~第 21 题为必考题, 每个试题考生都必须作答, 第 22 题, 23 题为选考题, 考生根据要求作答.

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分.

13. 过点 $P(2, 2)$ 的直线与抛物线 $y^2 = 4x$ 交于 A, B 两点, 且 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} = \vec{0}$,
则此直线的方程为_____.

14. 函数 $f(x) = x \ln x$ 的单调减区间为_____.

15. 在我校本年度足球比赛中, 经过激烈角逐后, 最终 A, B, C, D 四个班级的球队闯入半决赛.

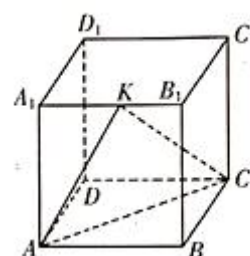
在半决赛中, 对阵形式为: A 对阵 C , B 对阵 D , 获胜球队进入决赛争夺冠亚军,

失利球队争夺三四名. 若每场比赛是相互独立的, 四支球队间相互获胜的概率如下表所示:

	A	B	C	D
A 获胜概率	—	0.3	0.4	0.8
B 获胜概率	0.7	—	0.7	0.5
C 获胜概率	0.6	0.3	—	0.3
D 获胜概率	0.2	0.5	0.7	—

则 A 队最终获得冠军的概率为_____.

16. 正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 2, 点 K 在棱 A_1B_1 上运动, 过 A, C, K 三点作正方体的截面, 若 K 为棱 A_1B_1 的中点, 则截面面积为_____, 若截面把正方体分成体积之比为 3:1 的两部分, 则 $B_1K =$ _____.



三、解答题: 本大题共 70 分, 解答应写出必要的文字说明, 证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知等差数列 $\{a_n\}$ 前三项的和为 -3, 前三项的积为 15,

(I) 求等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式;

(II) 若公差 $d > 0$, 求数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和 T_n .

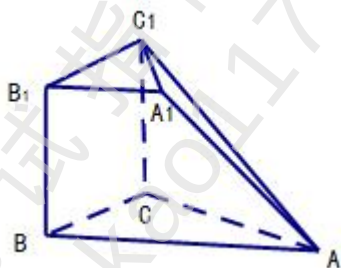
18. (本小题满分12分)

如图, 在多面体 $ABC-A_1B_1C_1$ 中, 正方形 BB_1C_1C 所在平面垂直于平面 ABC ,

$\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AC = BC = 1$, $B_1A_1 \parallel BA$, $B_1A_1 = \frac{1}{2}BA$.

(I) 求证: $C_1A_1 \perp$ 平面 ABB_1A_1 ;

(II) 若 M 为 B_1B 的中点, 求直线 CM 与平面 C_1A_1A 所成角的正弦值.



19. (本小题满分12分)

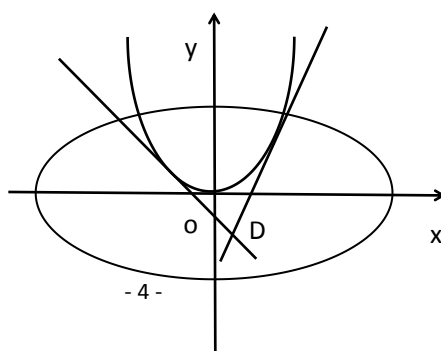
已知点 $D(\frac{1}{2}, -2)$, 过点 D 作抛物线 $C_1: x^2 = y$ 的两切线, 切点为 A, B .

(I) 求两切点 A, B 所在的直线方程;

(II) 椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$, 离心率为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (I) 中直线 AB 与椭圆交于点 P ,

Q , 直线 PQ, OP, OQ 的斜率分别为 k, k_1, k_2 , 若 $k_1 + k_2 = 3k$,

求椭圆的方程.



20. (本小题满分12分)

“海水稻”就是耐盐碱水稻，是一种介于野生稻和栽培稻之间的普遍生长在海边滩涂地区，具有耐盐碱的水稻，它比其它普通的水稻均有更强的生存竞争能力，具有抗涝，抗病虫害，抗倒伏等特点，还具有预防和治疗多种疾病的功效，防癌效果尤为显著。海水稻的灌溉是将海水稀释后进行灌溉.某试验基地为了研究海水浓度 x (%)对亩产量 y (吨)的影响,通过在试验田的种植实验,测得了某种海水稻的亩产量与海水浓度的数据如表.绘制散点图发现,可用线性回归模型拟合亩产量 y 与海水浓度 x 之间的相关关系,用最小二乘法计算得 y 与 x 之间的线性回归方程为 $\hat{y} = \hat{b}x + 0.88$.

海水浓度 x_i (%)	3	4	5	6	7
亩产量 y_i (吨)	0.62	0.58	0.49	0.4	0.31
残差 $\hat{e}_i$					

(I) 请你估计：当浇灌海水浓度为 8‰时，该品种的亩产量.

(II)

(i)完成上述残差表:

(ii)统计学中，常用相关指数 R^2 来刻画回归效果, R^2 越大,模型拟合效果越好,并用它来说明预报变量与解释变量的相关性.你能否利用以上表格中的数据，利用统计学的相关知识，说明浇灌海水浓度对亩产量的贡献率? (计算中数据精确到 0.01)

(附:残差公式 $\hat{e}_i = y_i - \hat{y}_i$ ，相关指数 $R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}$)

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = (x-2)e^x + a \ln x - ax$ ($a \in R$)

(I) 若 $x=1$ 为 $f(x)$ 的极大值点, 求 a 的取值范围;

(II) 当 $a \geq 0$ 时, 判断 $y = f(x)$ 与 x 轴交点个数, 并给出证明.

请考生在第 22、23 题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题计分.

作答时请写清题号.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2 + 3 \cos \alpha \\ y = 3 \sin \alpha \end{cases}$ (α 为参数),

以 O 为极点, x 轴非负半轴为极轴建立极坐标系, 直线 l_1, l_2 的极坐标方程分别为 $\theta = \theta_0$,

$\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$ ($\theta_0 \in (0, \pi), \rho \in R$), l_1 交曲线 C 于点 M, N , l_2 交曲线 C 于点 P, Q .

(I) 求曲线 C 的极坐标方程;

(II) 求 $|MN|^2 + |PQ|^2$ 的值.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4—5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x| + |x-1| - 2|x-2|$.

(I) 若关于 x 的不等式 $f(x) > a$ 有解, 求实数 a 的取值范围;

(II) 若不等式 $f(x) + 3 \leq |x-m|$ 对任意 $x \in R$ 成立, 求实数 m 的取值范围.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	D	C	A	C	D	C	C	D	B	D	B

13、 $y = x$ 14、 $(0, \frac{1}{e})$ 15、0.22 16、 $\frac{9}{2}\sqrt{3}-1$

17.解:

(1) 由 $a_1 + a_2 + a_3 = -3$, 得 $3a_2 = -3$ 所以 $a_2 = -1$ (1分)

又 $a_1 a_2 a_3 = 15$ 得 $a_1 a_3 = -15$, 即 $\begin{cases} a_1 + d = -1 \\ a_1 (a_1 + 2d) = -15 \end{cases}$ (2分)

所以 $\begin{cases} a_1 = -5 \\ d = 4 \end{cases}$, $\begin{cases} a_1 = 3 \\ d = -4 \end{cases}$ (4分)

即 $a_n = 4n - 9$ 或 $a_n = 7 - 4n$ (6分)

(2) 当公差 $d > 0$ 时, $a_n = 4n - 9$

1) 当 $n \leq 2$ 时, $a_n = 4n - 9 < 0$, $T_1 = -a_1 = 5, T_2 = -a_1 - a_2 = 6$ (7分)

设数列 $\{a_n\}$ 的前项和为 S_n , 则 $S_n = \frac{(-5 + 4n - 9)}{2} \times n = 2n^2 - 7n$ (8分)

2) 当 $n \geq 3$ 时, $T_n = S_n - 2S_2 = 2n^2 - 7n + 12$ (10分)

所以数列 $\{|a_n|\}$ 的前 n 项和 $T_n = \begin{cases} 5, & n=1 \\ 2n^2 - 7n + 12, & n \geq 2 \end{cases}$ (12分)

18. 解:

(1) 可取 AB 中点 O , 连结 A_1O, OC , 证明四边形 A_1OCC_1 为平行四边形,

且 $CO \perp$ 平面 ABB_1A_1 即可 (6分)

(2) 易知 CA, CB, CC_1 两两垂直, 故以 C 为坐标原点, 分别以 CB, CA, CC_1 的方向为 x, y, z 轴正方向建立空间直角坐标系。

可求得 $\overrightarrow{CM} = (1, 0, \frac{1}{2})$, (7分)

平面 AA_1C_1 的一个法向量为 $\vec{m} = (-1, 1, 1)$ (9分)

设直线 $\overrightarrow{CM}$ 与平面 AA_1C_1 所成角为 θ , 则 $\sin \theta = \left| \cos \langle \overrightarrow{CM}, \vec{m} \rangle \right| = \frac{\sqrt{15}}{15}$ (11分)

所以直线 CM 与平面 AA_1C_1 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{15}$ 。(12 分)

19、(1) $y = x + 2$ (2) $\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12} = 1$

(1) 设切点 $A(x_1, y_1)$ 则有 $y = x^2$

由切线 l 的斜率为设切点 $A(x_1, y_1)$ $B(x_2, y_2)$

$y' = 2x$ 所以抛物线 $A(x_1, y_1)$ 点的切线的斜率为 $2x_1$, 切线方程为 $y = 2x_1x - x_1^2$

抛物线 $B(x_2, y_2)$ 点的切线的斜率为 $2x_2$, 切线方程为 $y = 2x_2x - x_2^2$ (2 分)

两切线交点 $(\frac{x_1 + x_2}{2}, x_1x_2)$ (4 分)

$$x_D = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{1}{2} \quad y = x + 2 \quad (6 \text{ 分})$$

$$y_D = x_1x_2 = -2$$

(2) 直线方程为 $y = x - 2$

$$\text{由 } e = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ 得 } \frac{c^2}{a^2} = \frac{3}{4} \text{ 又 } c^2 = a^2 - b^2,$$

$$\text{所以 } a^2 = 4b^2.$$

$$\text{所以椭圆方程为 } \frac{x^2}{4b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

$$\text{由 } \begin{cases} y = x - 2 \\ x^2 + 4y^2 = 4b^2 \end{cases} \text{ 得 } 5x^2 - 16x + 16 - 4b^2 = 0,$$

$$\text{所以 } \begin{cases} x_0 + x_1 = \frac{16}{5} \\ x_0x_1 = \frac{16-4b^2}{5} \end{cases} \quad (8 \text{ 分})$$

$$\text{又因为 } k_1 + k_2 = 3k,$$

$$\text{即 } \frac{y_0}{x_0} + \frac{y_1}{x_1} = \frac{x_1(x_0-2) + x_0(kx_1-2)}{x_0x_1} = 2k - \frac{2(x_1+x_0)}{x_0x_1} = 2k - \frac{16}{16-4b^2} = 3k, \quad (10 \text{ 分})$$

$$\frac{x^2}{48} + \frac{y^2}{12} = 1 \quad (12 \text{ 分})$$

$$20.(1) \text{ 经计算, } \bar{x} = 5, \bar{y} = 0.48,$$

$$\text{由 } 0.48 = 5\hat{b} + 0.88 \text{ 可得, } \hat{b} = -0.08, \dots, 1 \text{ 分}$$

当 $x=8$ 时, $\hat{y} = -0.08 \times 8 + 0.88 = 0.24$, 2 分

所以当海水浓度为 8‰ 时, 该品种的亩产量为 0.24 吨. 3 分

(2)(ii) 由(1)知 $\hat{y} = -0.08x + 0.88$, 从而有

海水浓度 x_i (%)	3	4	5	6	7
亩产量 y_i (吨)	0.62	0.58	0.49	0.4	0.31
残差 $\hat{e}_i$	-0.02	0.02	0.01	0	-0.01

8 分

$$(ii) R^2 = 1 - \frac{0.0004 + 0.0004 + 0.0001 + 0 + 0.0001}{0.14^2 + 0.1^2 + 0.01^2 + (-0.08)^2 + 0.17^2} = 1 - \frac{0.001}{0.065} = \frac{64}{65} \approx 0.98, \quad 10 \text{ 分}$$

所以亩产量的变化有 98% 是由海水浓度引起的. (或者说海水浓度解释了 98% 的亩产量变化) 12 分

$$21、(1) f'(x) = (x-1)\left(e^x - \frac{a}{x}\right) = (x-1)\frac{e^x x - a}{x} \quad (1 \text{ 分})$$

设 $g(x) = xe^x - a$

$$g'(x) = (x+1)e^x > 0$$

当 $a = e$ 无极值

$a > e$ 成立

$a < e$ $x=1$ 为极小值点

综上 $a > e$ (6 分)

(2) 由 (1) 知

① $a = e$ $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 单调递增, $f(2) < 0$, $f(3) > 0$ 有唯一零点

② $a < e$ x_0 满足 $g(x) = xe^x - a = 0$, $x_0 < 1$

$f(x)$ 在 $(0, x_0)$ 增, $(x_0, 1)$ 减 $(1, +\infty)$ 增

当 $x \in (0, 1)$ 时 $f(x) < 0$ 恒成立, 当 $x \in (1, +\infty)$ $f(1) < 0$ $f(a+2) = ae^{a+2} + a \ln(a+2) - a^2 - 2a$

$$e^{a+2} > a+3 \quad f(a+2) > a(a+3) + a \ln(a+2) - a^2 - 2a > 0$$

有唯一零点

③ $a > e$

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 增, $(1,x_0)$ 减 $(x_0, +\infty)$ 增

$f(x_0) < f(1) < 0$ 在 $(0,x_0)$ 无零点, 在 $(x_0, +\infty)$ 有唯一零点

综上: $a \geq 0$, $f(x)$ 有唯一零点 (12 分)

22. 解: (1) 曲线 E 的普通方程为 $(x-2)^2 + y^2 = 9$

令 $x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ 得 $(\rho \cos \theta - 2)^2 + \rho^2 \sin^2 \theta = 9$,

即曲线 E 极坐标方程为 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta - 5 = 0$ 4 分

(2) 依题意得 $l_1 \perp l_2$, 根据勾股定理, $MP^2 = OM^2 + OP^2$, $NQ^2 = ON^2 + OQ^2$

将 $\theta = \theta_0$, $\theta = \theta_0 + \frac{\pi}{2}$ 代入 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta - 5 = 0$ 中,

得 $\rho^2 - 4\rho \cos \theta_0 - 5 = 0$, $\rho^2 + 4\rho \sin \theta_0 - 5 = 0$ 6 分

设点 M, N, P, Q 所对应的极径分别为 $\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4$,7 分

则 $\rho_1 + \rho_2 = 4 \cos \theta_0$, $\rho_1 \rho_2 = -5$, $\rho_3 + \rho_4 = -4 \sin \theta_0$, $\rho_3 \rho_4 = -5$ 8 分

$\therefore |MP|^2 + |NQ|^2 = |OM|^2 + |OP|^2 + |ON|^2 + |OQ|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2 + \rho_3^2 + \rho_4^2$

$= (\rho_1 + \rho_2)^2 - 2\rho_1 \rho_2 + (\rho_3 + \rho_4)^2 - 2\rho_3 \rho_4 = 16 \cos^2 \theta_0 + 10 + 16 \sin^2 \theta_0 + 10 = 36$ 10 分

$$23. (1) f(x) = |x| + |x-1| - 2|x-2| = \begin{cases} -3, & x \leq 0 \\ 2x-3, & 0 < x \leq 1 \\ 4x-5, & 1 < x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases},$$

$\therefore f(x)$ 的值域为 $[-3, 3]$,

$\therefore$ 关于 x 的不等式 $f(x) > a$ 有解,

$\therefore a < 3$, 5 分

(2) $y = f(x)$ 与 $y = |x-m| - 3$

由图象知, 要使 $f(x)+3 \leq |x-m|$ 对任意 $x \in \mathbf{R}$ 成立,

只需要 $f(2) \leq |2-m|-3$, 且 $m < 0$

解得 $m \leq -4$, 9 分

故 m 得取值范围为 $(-\infty, -4]$. 10 分

教育考试指南
(ID: longkao1177)